Красноярский ДНИТ ДОМ НАУКИ И ТЕХНИКИ

II Международная Школа-семинар
HMMOCS-II 2023: Гибридные методы моделирования и оптимизации в сложных системах

«Информационно-логические преобразования в базисах Шеффера и Пирса в Maple»

Оленев А.А., Потехина Е. В., Хабаров А. Н., Зверева Л.Г.

Актуальность

Одной из задач синтеза и анализа функционирования комбинационных устройств является представление булевой функции в различных базисах. Абсолютная полнота использования и реализации разнообразных преобразований булевых функций невозможна без осуществления преобразований в универсальные базисы Шеффера (И-НЕ) или Вебба (ИЛИ-НЕ).

Документация по применению операций &nand (базис Шеффера) и &nor (базис Вебба) библиотеки Logic системы компьютерной алгебры Maple, для построения моделей булевых функций, практически отсутствует.

.

Задачи:

- **реализация процедур преобразования дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных форм в логические выражения, представленные с использованием операций Штрих Шеффера и Стрелка Пирса**
- **Автоматизированное получение такого представления.**

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИЗВЕСТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

- Анализ функционала рассмотренных комплекса, позволяет сделать вывод, что он ориентирован на решение учебных задач по дискретной математике и математической логике, но рассмотрение решения ряда задач, связанных с преобразованием и представлением булевых функций с использованием операций Штрих Шеффера и Стрелки Пирса в программах не представляется возможным.

Методы

Примеры представления булевой функции в базисе Шеффера для случаев n =1, n = 2, n= 3.

1) Пусть n = 1. Тогда, используя закон де Моргана, получим:

$$\overline{x_1} = x_1 | x_1$$

1) Пусть n=2. Тогда, используя закон де Моргана, получим:

$$\overline{x_1 \wedge x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} = x_1 | x_2$$

1) Пусть n=3. Тогда, используя закон де Моргана, получим:

$$\overline{x_1 \wedge x_2 \wedge x_3} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} = x_1 | x_2 | x_3$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \overline{\overline{\lambda_1} \wedge \dots \wedge \overline{\lambda_k}} = \overline{\lambda_1} | \overline{\lambda_2} | \dots | \overline{\lambda_k}$$

Приведем аналогичные выражения для представления функции в базисе Вебба (Стрелка Пирса) для случаев *n* =1, *n* =2, *n*=3:

1) Пусть *n* =1. Тогда, используя закон де Моргана, получим:

$$\overline{x_1} = x_1 \downarrow x_1$$

1) Пусть *n*=2. Тогда, используя закон де Моргана, получим:

$$\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} = x_1 \downarrow x_2$$

1) Пусть *n*=3. Тогда, используя закон де Моргана, получим:

$$\overline{x_1 \vee x_2 \vee x_3} = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3} = x_1 \downarrow x_2 \downarrow x_3 \quad (2)$$

$$\overline{x_1 \bigvee x_2 \bigvee x_3} = \overline{x_1} \bigwedge \overline{x_2} \bigwedge \overline{x_3} = x_1 \downarrow x_2 \downarrow x_3$$

Алгоритм перехода от МДНФ и МКНФ к базисам Шеффера и Вебба

Шаг первый. Осуществляем преобразование (проверку правильности) представления логической функции в дизъюнктивном виде с сохранением инверсии. Если в многочлен входит литерал с инверсией, то преобразование осуществляется как $\overline{x_1} = x_1 | x_1$. Осуществляем преобразование (формирование) списка конъюнктивного многочлена.

Шаг второй. Осуществляем получение конъюнктивного многочлена в заданной форме. В данном случае в базисе Шеффера.

Шаг третий. Осуществляем получение конъюнктивных многочленов в виде списка.

Шаг четвертый. Производим накопление конъюнктивных многочленов. Проверяем наличие специальных случаев. Конъюнктивный многочлен представлен только одним литералом или его инверсией, или в дизъюнктивную форму входит только один конъюнктивный многочлен.

Шаг пятый. Получаем окончательный результат.

Шаг первый. Осуществляем преобразование (проверку правильности) представления логической функции в конъюнктивном виде с сохранением инверсии. Если в многочлен входит литерал с инверсией, то преобразование осуществляется как $\overline{x_1} = x_1 \downarrow x_1$. Осуществляем преобразование (формирование) списка дизъюнктивного многочлена.

Шаг второй. Осуществляем получение дизъюнктивного многочлена в заданной форме. В данном случае в базисе Вебба.

Шаг третий. Осуществляем получение дизъюнктивных многочленов в виде списка.

Шаг четвертый. Производим накопление дизъюнктивных многочленов. Проверяем наличие специальных случаев. Дизъюнктивный многочлен представлен только одним литералом или его инверсией, или в дизъюнктивную форму входит только один дизъюнктивный многочлен.

Шаг пятый. Получаем окончательный результат.

РЕАЛИЗАЦИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В СИСТЕМЕ MAPLE

Листинг 1: Представление конъюнкта в виде списка с учетом выполнения операций инверсии реализованной в базисе Шеффера (формула 1).

```
> Disjunction:= proc(a)
local K, i, C;
K:= [op(Normalize(a))];
for i from 1 to nops(K) do
if nops(K)>1 and  op(0,K[i])=`&not` then K[i]:= op(1,K[i])
&nand op(1,K[i]);
elif nops(K)>1 and  op(0,K[i])<>`&not` then K[i]:= op(1,K[i]);
end if;
end do:
C:=&nand(op(K));
if nops(a)=1 and op(0,a)=`&not` then C:=op(1,a);
elif nops(a)=1 and op(0,a)<>`&not` then C:= op(1,a)&nand
op(1,a);
end if;
return C;
end proc:
```

Листинг 2: Представление булевой функции в Базисе Шеффера (дизъюнктивная нормальная форма), реализация формулы 3.

```
>  DNF_SHSH:=proc(b)
local W, i, R;
W:= [op(Normalize(b))];
for i from 1 to nops(W) do
W[i]:=Disjunction(W[i]);
end do;
R:=&nand(op(W));
if nops(b)>1 and op(0,b)=`&and` then R:=Disjunction(b)&nand
Disjunction(b);
elif nops(b)=1 then R:=Disjunction(b)&nand Disjunction(b);
end if;
return R;
end proc:
```

Листинг 3: Представление дизъюнкта в виде списка с учетом выполнения операций инверсии реализованной в базисе Вебба (формула 2).

```
> Conjunct:= proc(a)
local K, i, C;
K:= [op(Normalize(a, form=CNF))];
for i from 1 to nops(K) do
if nops(K)>1 and  op(0,K[i])=`&not` then K[i]:= op(1,K[i])
&nor op(1,K[i]);
elif nops(K)>1 and  op(0,K[i])<>`&not` then K[i]:= op(1,K[i]);
end if;
end do:
C:=&nor(op(K));
if nops(a)=1 and op(0,a)=`&not` then C:=op(1,a);
elif nops(a)=1 and op(0,a)<>`&not` then C:= op(1,a)&nor
op(1,a);
end if;
return C;
end proc:
```

Листинг 4: Представление булевой функции в Базисе Вебба (конъюнктивная нормальная форма), реализация формулы 4.

```
> KNF_SP:=proc(b)
local W, i, R;
W:= [op(Normalize(b, form=CNF))];
for i from 1 to nops(W) do
W[i]:=Conjunct(W[i]);
end do;
R:=&nor(op(W));
if nops(b)>1 and op(0,b)=`&or` then R:=Conjunct(b)&nor
Conjunct(b);
elif nops(b)=1 then R:=Conjunct(b)&nor Conjunct(b);
end if;
return R;
end proc:
```

ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ РАЗРАБОТАННЫХ ПРОЦЕДУР

Пример 1. Необходимо представить в базисе Шеффера следующую логическую функцию:

$$\overline{(c \wedge g \wedge h)} \vee (d \wedge j)$$

Решение. Используя разработанные функции осуществим преобразование в универсальный базис Шеффера:

> DNF_SHSH((&not c &and g &and h) &or (d &and j));

Получили следующий ответ:

$$(d \text{ \&nand } j) \text{ \&nand } ((g \text{ \&nand } h) \text{ \&nand } (c \text{ \&nand } c))$$

Применяя функцию **Equivalent** библиотеки Logic системы компьютерной алгебры Maple осуществим проверку правильности преобразования заданной функции:

> Equivalent(%, &not c &and g &and h &or (d &and j));

Получили следующий ответ:

$$true$$

Пример 2. Необходимо представить в базисе Вебба следующую логическую функцию:

$$(x \vee \overline{y} \vee z) \wedge a$$

Решение. Представим вышеприведенное выражение с использованием языка Maple:

Используя разработанные функции осуществим преобразование в универсальный базис Вебба:

> KNF_SP((&not y &or x &or z)&and (a));

Получили следующий ответ:

$$(a \text{ \&nor } a) \text{ \&nor } ((x \text{ \&nor } z) \text{ \&nor } (y \text{ \&nor } y))$$

Применяя функцию **Equivalent** библиотеки Logic системы компьютерной алгебры Maple осуществим проверку правильности преобразования заданной функции:

> **Equivalent(%,(x &or &not y &or z)&and a);**

В результате проведенной проверки получили следующий результат:

$$true$$

Выводы

- Созданные процедуры позволяют расширить возможности пакета Logic системы компьютерной алгебры Maple.

построение модели булевой функции с использованием универсальных базисов Шеффера и Вебба было обосновано, так как реализуемые алгоритмы позволяют выполнять данные преобразования и производить сравнение полученных форм с полученными ранее.

встроенный язык системы компьютерной алгебры Maple и его применение дает возможность адекватно выразить алгебраическую конструкцию в универсальных базисах и подтверждает необходимость расширения библиотеки Logic, и проведение формальных доказательств такого представления.

Контакты

Оленев Александр Анатольевич

E-mail: olenevalexandr@gmail.com

Потехина Екатерина Валентиновна

E-mail: ekapotekhina@yandex.ru

Зверева Лариса Геннадиевна

E-mail: bdeh@mail.ru

Ставропольский государственный педагогический институт

Хабаров Алексей Николаевич

Ставропольский государственный аграрный университет

Школа-семинар

Гибридные методы моделирования и оптимизации в сложных системах

28-30 ноября 2023 года | Красноярск, Россия